Correction des exercices pour la première

1/ Nombres – inégalités

Ex 1 : $A=\frac{6}{3}+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$ un rationnel (appartient à $\mathbb{Q}$)

$B=(\sqrt{3})^2-1^2=3-1=2$ un entier naturel (appartient à $\mathbb{N}$)

$C=(\sqrt{5})^2+2\times\sqrt{5}\times1+1^2=5+2\sqrt{5}+1=6+2\sqrt{5}$ un réel (appartient à $\mathbb{R}$)

$D=\frac{2}{5}+\frac{35}{5}=\frac{37}{5}$ un décimal (appartient à D)

Ex 2 :

x	- 5	-1	0	4	8	10
$f(x)$	- 0, 385	-1	0	0,471	0,246	0,198

Ex 3 :

1. $\frac{9}{4}x>4-\frac{6}{7}\Leftrightarrow\frac{9}{4}x>\frac{28}{7}-\frac{6}{7}\Leftrightarrow\frac{9}{4}x>\frac{22}{7}\Leftrightarrow x>\frac{\frac{22}{7}}{\frac{9}{4}}\Leftrightarrow x>\frac{22}{7}\times\frac{4}{9}\Leftrightarrow x>\frac{88}{63}$ S =] $\frac{88}{63}$; + ∞[

2. $6+\frac{5}{3}\leq\frac{17}{3}x\Leftrightarrow\frac{18}{3}+\frac{5}{3}\leq\frac{17}{3}x\Leftrightarrow\frac{23}{3}\leq\frac{17}{3}x\Leftrightarrow 23\leq17x\Leftrightarrow\frac{23}{17}\leq x$ S = [$\frac{23}{17}$; + ∞[

3. $\frac{2(8+x)}{14}<\frac{2x\times14}{14}+\frac{9}{14}\Leftrightarrow\frac{16+2x}{14}<\frac{28x}{14}+\frac{9}{14}\Leftrightarrow 16+2x<28x+9\Leftrightarrow16-9<28x-2x\Leftrightarrow7<26x\Leftrightarrow\frac{7}{26}<x$

S =] $\frac{7}{26}$; + ∞[

Ex 4 :

1. x doit appartenir à [0;10]
2. $A_T=\frac{2x\times x}{2}=x^2$ $A_C=(10-x)^2=10^2-2\times10\times x+x^2=100-20x+x^2$
3. $A_C\geq A_T\Leftrightarrow100-20x+x^2\geq x^2\Leftrightarrow100-20x\geq0\Leftrightarrow100\geq20x\Leftrightarrow\frac{100}{20}\geq x\Leftrightarrow5\geq x$

Il faut que x appartienne à [0;5]

4. $P_T=3\times x=3x$ $P_C=4\times(10-x)=40-4x$

$P_T\geq P_C\Leftrightarrow3x\geq40-4x\Leftrightarrow3x+4x\geq40\Leftrightarrow7x\geq40\Leftrightarrow\frac{7}{40}\geq x$

Il faut que x appartienne à [0 ; $\frac{7}{40}$]

5. Il faut résoudre le système

$5\geq x\geq0$

$\frac{7}{40}\geq x\geq0$ la solution est donc [0 ; $\frac{7}{40}$]

2/ Arithmétique :

Ex1

1.
$$\begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 147 & 3 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$126 = 2 \times 3^2 \times 7$ $\qquad$ $147 = 3 \times 7^2$

2. $\dfrac{126}{147} = \dfrac{2 \times \cancel{3^2}^{1} \times \cancel{7}}{\cancel{3} \times \cancel{7^2}^{1}} = \dfrac{2 \times 3}{7} = \dfrac{6}{7}$

3. $\sqrt{147} = \sqrt{3 \times 7^2} = 7\sqrt{3}$

4. $147 = \begin{Bmatrix} 1 ; & 3 ; & 7 \\ 147 ; & 49 ; & 21 \end{Bmatrix}$ diviseurs de 147

5. Faux car = $2^2 \times 3 \times 5 = 60$ $\qquad 2 \times 3^2 \times 5 = 90$

l'un n'est pas multiple de l'autre

Ex2

1.
$$\begin{array}{r|l} 4725 & 3 \\ 1575 & 3 \\ 525 & 3 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2625 & 3 \\ 875 & 5 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$A = \dfrac{3^{\cancel{3}\,2} \times \cancel{5^2} \times \cancel{7}}{\cancel{3} \times 5^{\cancel{3}\,1} \times \cancel{7}} = \dfrac{3^2}{5} = \dfrac{9}{5}$

2.
$$\begin{array}{r|l} 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 192 & 2 \\ 96 & 2 \\ 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 196 & 2 \\ 98 & 2 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$B = \dfrac{\sqrt{3 \times 5^2} \times \sqrt{2^6 \times 3}}{\sqrt{2^2 \times 7^2}}$

$= \dfrac{5\sqrt{3} \times 2^3 \times \sqrt{3}}{2 \times 7}$

$= \dfrac{5 \times 2^{2} \times 3}{\cancel{2} \times 7} = \dfrac{60}{7}$

3. $C = \dfrac{3}{7} - \dfrac{4}{5} \times \dfrac{3}{8_2} = \dfrac{3}{7} - \dfrac{3}{10} = \dfrac{30}{70} - \dfrac{21}{70} = \dfrac{9}{70}$

4. $D = \dfrac{8^4}{5} \times \dfrac{3}{\cancel{2}} + \dfrac{7}{3} = \dfrac{12}{5} + \dfrac{7}{3} = \dfrac{36}{15} + \dfrac{35}{15} = \dfrac{71}{15}$

Ex 3 :

1. a est impair donc $a=2\times k+1$ donc $3a=3(2\times k+1)=6k+3=2(3k+1)+1$ donc impair
   b est impair donc $b=2\times k'+1$ donc $2b=2(2\times k'+1)=4k'+2=2(2k'+1)$ donc pair
   $3a+2b$ est impair car on additionne un pair et un impair
   a est impair donc $a=2\times k+1$ donc $4a=4(2\times k+1)=8k+4=2(4k+2)$ donc pair
   $4a+2b$ est pair car on additionne deux nombres pairs

2. a .Rappel pair x pair => pair ; pair x impair => pair ; impair x impair => impair

u	v	au	bv	$au+bv$
Pair	Pair	pair	pair	pair
Pair	Impair	pair	impair	impair
Impair	Pair	pair	pair	pair
Impair	Impair	pair	impair	impair

b. Pour que au + bv soit pair, il faut que v soit pair (qu'importe u)

u	v	au	bv	$au+bv$
Pair	Pair	pair	pair	pair
Pair	Impair	pair	pair	pair
Impair	Pair	pair	pair	pair
Impair	Impair	pair	pair	pair

Quel que soit la parité de u et de v, au + bv est toujours pair

3/ Calcul littéral

Ex 1 :

1. $A(x)=(2x-3)^2-(2x-3)(x+1)=(2x)^2-2\times 2x\times 3+3^2-(2x\times x+2x\times 1-3\times x-3\times 1)$
$A(x)=4x^2-12x+9-(2x^2+2x-3x-3)=4x^2-12x+9-(2x^2-x-3)=4x^2-12x+9-2x^2+x+3$
$A(x)=2x^2-11x+12$

$B(x)=(3x+1)(3x-1)+2(3x-1)=(3x)^2-1^2+2\times 3x-2\times 1=9x^2-1+6x-2=9x^2+6x-3$

2. $B(x)=(3x+1)(3x-1)+2(3x-1)=(3x-1)((3x+1)+2)=(3x-1)(3x+3)$

$C(x)=4x^2+20x+25=(2x)^2+20x+5^2=(2x+5)^2$

$D(x)=(2x+1)^2-49=(2x+1)^2-7^2=(2x+1+7)(2x+1-7)=(2x+8)(2x-6)$

Ex 2 :

1.
$3x-2(x+5)=4-(x-2) \Leftrightarrow 3x-2x-2\times 5=4-x+2 \Leftrightarrow x-10=6-x \Leftrightarrow x+x=6+10 \Leftrightarrow 2x=16 \Leftrightarrow x=\frac{16}{2} \Leftrightarrow x=8$

$S=\{8\}$

2.
$(2x+1)(6-3x)=0 \Leftrightarrow 2x+1=0 \; ou \; 6-3x=0$

$2x=-1$, $x=\frac{-1}{2}$ ou $6=3x$, $\frac{6}{3}=x$, $x=2$

$S=\{-0,5\,;2\}$

3. $(x+1)(3x-4)=(x+1)^2 \Leftrightarrow (x+1)(3x-4)-(x+1)^2=0 \Leftrightarrow (x+1)((3x-4)-(x+1))=0$
$(x+1)(3x-4-x-1)=0 \Leftrightarrow (x+1)(2x-5)=0 \Leftrightarrow x+1=0 \; ou \; 2x-5=0$

$x=-1$ ou $2x=5$, $x=\frac{5}{2}$

$S=\{-1\,;2,5\}$

4. $4x^2=(4x+3)^2 \Leftrightarrow 4x^2-(4x+3)^2=0 \Leftrightarrow (2x)^2-(4x+3)^2=0 \Leftrightarrow (2x-(4x+3))(2x+(4x+3))=0$
$(2x-4x-3)(2x+4x+3)=0 \Leftrightarrow (-2x-3)(6x+3)=0 \Leftrightarrow -2x-3=0 \; ou \; 6x+3=0$

$-2x=3$, $x=\frac{-3}{2}$ ou $6x=-3$, $x=\frac{-3}{6}=-0,5$

$S=\{-1,5;-0,5\}$

Ex 3 :

1. $f(x)=x^2-6x+8 \; forme\,1$
$(x-2)(x-4)=x\times x-4\times x-2\times x-2\times(-4)=x^2-4x-2x+8=x^2-6x+8=f(x) \; forme\,2$
$(x-3)^2-1=x^2-2\times x\times 3+3^2-1=x^2-6x+9-1=x^2-6x+8=f(x) \; forme\,3$

2. a. $f(1)$ forme 1
$f(1)=1^2-6\times 1+8=3$

b. $f(x)=0$ forme 2
$(x-2)(x-4)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \; ou \; x-4=0 \Leftrightarrow x=2 \; ou \; x=4$
$S=\{2\,;4\}$

c. Antécédents de 8 : il faut résoudre $f(x)=8$ forme 1
$x^2-6x+8=8 \Leftrightarrow x^2-6x=0 \Leftrightarrow x(x-6)=0 \Leftrightarrow x=0 \; ou \; x-6=0 \Leftrightarrow x=0 \; ou \, x=6$

d. Il faut résoudre $f(x)=3$ forme 3

$(x-3)^2-1=3 \Leftrightarrow (x-3)^2-1-3=0 \Leftrightarrow (x-3)^2-4=0 \Leftrightarrow (x-3)^2-2^2=0 \Leftrightarrow (x-3-2)(x-3+2)=0$

$(x-5)(x-1)=0 \Leftrightarrow x-5=0 \text{ ou } x-1=0 \Leftrightarrow x=5 \text{ ou } x=1$

<u>Ex 4 :</u>

1.

$$\frac{2}{1-x}-\frac{x}{3x+2}=\frac{2(3x+2)}{(1-x)(3x+2)}-\frac{x(1-x)}{(1-x)(3x+2)}=\frac{2\times 3x+2\times 2-x\times 1-x\times(-x)}{(1-x)(3x+2)}=\frac{6x+4-x+x^2}{(1-x)(3x+2)}=\frac{x^2+5x+4}{(1-x)(3x+2)}$$

Or $(x+1)(x+4)=x^2+4\times x+1\times x+1\times 4=x^2+5x+4$

Donc $\frac{x^2+5x+4}{(1-x)(3x+2)}=\frac{(x+1)(x+4)}{(1-x)(3x+2)}$

2. $\frac{2}{1-x}=\frac{x}{3x+2} \Leftrightarrow \frac{2}{1-x}-\frac{x}{3x+2}=0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x+4)}{(1-x)(3x+2)}=0 \Leftrightarrow (x+1)(x+4)=0 \text{ avec } 1-x\neq 0 \text{ et } 3x+2\neq 0$

$x+1=0 \text{ ou } x+4=0 \Leftrightarrow x=-1 \text{ ou } x=-4$

<u>Ex 5 :</u>

1. x doit appartenir à [0;40]
2. a. AP = AB – PB = 60 – PN = 60 – x
   b. $A(x)=AP\times AN=x\times(60-x)=60x-x^2$
   c. $900-(x-30)^2=900-(x^2-2\times x\times 30+30^2)=900-x^2+60x-900=60x-x^2=A(x)$
3. problème 1 :

On doit résoudre $A(x)=800$ On prend la forme 2

$900-(x-30)^2=800 \Leftrightarrow 900-800=(x-30)^2 \Leftrightarrow 100-(x-30)^2=0 \Leftrightarrow 10^2-(x-30)^2=0$

$(10-(x-30))(10+(x-30))=0 \Leftrightarrow (10-x+30)(10+x-30)=0 \Leftrightarrow (40-x)(-20+x)=0 \Leftrightarrow 40-x=0 \text{ ou } -20+x=0$

$x=40 \text{ ou } x=20$

problème 2 :

Aire du triangle NPB $A_T(x)=\frac{PN\times PB}{2}=\frac{x\times x}{2}=\frac{x^2}{2}$

On doit résoudre $A(x)=\frac{x^2}{2}$ On prend la forme 1

$60x-x^2=\frac{x^2}{2} \Leftrightarrow 60x-x^2-\frac{x^2}{2}=0 \Leftrightarrow 60x-\frac{3x^2}{2}=0 \Leftrightarrow x(60-\frac{3x}{2})=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } 60-\frac{3x}{2}=0$

$60=\frac{3x}{2}$

$x=0$ ou $2\times 60=3x$

$120=3x$

$x=\frac{120}{3}=40$

4. $(x-30)^2\geq 0$ quel que soit la valeur de x

$-(x-30)^2\leq 0$ quel que soit la valeur de x

donc $900-(x-30)^2\leq 900$ quel que soit la valeur de x

$A(x)\leq 900$

$A(x)=900 \Leftrightarrow 900-(x-30)^2=900 \Leftrightarrow -(x-30)^2=0 \Leftrightarrow (x-30)^2=0 \Leftrightarrow x-30=0 \Leftrightarrow x=30$

4/ Fonctions :

Ex 1 : $f(x)=x^2+k$

1. a. $f(-1)=3 \Leftrightarrow (-1)^2+k=3 \Leftrightarrow 1+k=3 \Leftrightarrow k=3-1 \Leftrightarrow k=2$

b. le point de coordonnées (2;10) appartient à la courbe de *f* donc $f(2)=10$
$f(2)=10 \Leftrightarrow (2)^2+k=10 \Leftrightarrow 4+k=10 \Leftrightarrow k=10-4 \Leftrightarrow k=6$

c. $f(3)=8 \Leftrightarrow (3)^2+k=8 \Leftrightarrow 9+k=8 \Leftrightarrow k=8-9 \Leftrightarrow k=-1$

2. a. *f* est paire <=> $f(-x)=f(x)$ pour tout *x* appartenant à l'ensemble de définition de *f*
$f(-x)=(-x)^2+k=x^2+k=f(x)$ donc *f* est paire

b. La courbe de la fonction f sera symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Ex 2 :

$T=2\pi\sqrt{(\frac{l}{g})}$

1. $T=2\pi\sqrt{(\frac{5}{9{,}81})}\simeq 4{,}5\ s$

2. T = 10 donc $10=2\pi\sqrt{(\frac{l}{9{,}81})} \Leftrightarrow \frac{10}{2\pi}=\sqrt{(\frac{l}{9{,}81})} \Leftrightarrow (\frac{5}{\pi})^2=\frac{l}{9{,}81} \Leftrightarrow \frac{25}{\pi^2}\times 9{,}81=l \Leftrightarrow l=24{,}85\ m$

3. a. $T=2\pi\sqrt{(\frac{10}{9{,}81})}\simeq 6{,}3\ s$ la période du pendule B est plus grande mais pas le double

b. Si le pendule A a une longueur inférieure à celle du pendule B, sa période sera inférieure.

Ex 3 :

1. a. $1<R<2$ donc $1^3<R^3<2^3 \Leftrightarrow 1<R^3<8$
$\frac{4}{3}\pi\times 1<\frac{4}{3}\pi\times R^3<\frac{4}{3}\pi\times 8 \Leftrightarrow \frac{4}{3}\pi<V<\frac{32}{3}\pi$

b. $\frac{4}{3}\pi\simeq 4{,}19$ et $\frac{32}{3}\pi\simeq 33{,}5$ donc non on ne peut pas donner une valeur approchée du volume à 10 cm³ près .

2. a. $2<R<3$ donc $2^3<R^3<3^3 \Leftrightarrow 8<R^3<27$
$\frac{4}{3}\pi\times 8<\frac{4}{3}\pi\times R^3<\frac{4}{3}\pi\times 27 \Leftrightarrow \frac{32}{3}\pi<V<36\pi$

Or $\frac{32}{3}\pi\simeq 33{,}5$ et $36\pi\simeq 113{,}1$ Donc pour avoir un volume de 100 cm³ R doit être compris entre 2 et 3 cm.

b.

x	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3
f(x)	33,5	38,8	44,6	51	57,9	65,4	73,6	82,4	92	102,2	113,1

c. R est environ égal à 2,9 cm.

Ex 4 :

1. *f* et *g* sont définies sur [-3;6]

2. Si k < -2 $f(x)=k$ n'a pas de solution

Si k = -2 $f(x)=k$ a une solution

Si -2< k ≤ 1 $f(x)=k$ a deux solutions

Si 1 <k < 5,5 $f(x)=k$ a deux solutions

Si k = 5,5 $f(x)=k$ a une solution

Si k >5,5 $f(x)=k$ n'a pas de solution

3. a. $S=\{-1;1\}$ b. $S=\{2;5\}$ c. S = [-3;0,5] U [5;6] d. S =]2;5[

Ex 5

1 a. $3x+1=0$
$3x=-1$
$x=-\frac{1}{3}$

$4-2x=0$
$4=2x$
$\frac{4}{2}=x$
$2=x$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$3x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$4-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(3x+1)(4-2x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b. $(3x+1)(4-2x)\geq 0$ (positif) $S=[-\frac{1}{3};2]$

2 a $x=0$

$3x-6=0$
$3x=6$
$x=\frac{6}{3}$
$x=2$

$1-x=0$
$1=x$
valeur interdite

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$3x-6$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\frac{x(3x-6)}{1-x}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	

b. $\frac{x(3x-6)}{1-x}\leq 0$ (négatif)

$S=[0;1[\cup[2;+\infty[$

Ex 6

1. $x-3(x+5)<3x-(2x-3)$
$x-3x-15<3x-2x+3$
$-2x-15<x+3$
$-2x-x<3+15$
$-3x<18$
$x>\frac{18}{-3}$
$x>-6$
$S=]-6;+\infty[$

2. $(2x+1)^2>3x(2x+1)$
$(2x+1)^2-3x(2x+1)>0$
$(2x+1)[(2x+1)-3x]>0$
$(2x+1)(2x+1-3x)>0$
$(2x+1)(-x+1)>0$
$2x+1=0 \Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow x=\frac{-1}{2}$
$-x+1=0 \Rightarrow 1=x$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S=]-\infty;-\frac{1}{2}[\cup]1;+\infty[$

3. $4x^2 \leq (2x+3)^2$

$4x^2 - (2x+3)^2 \leq 0$

$(2x)^2 - (2x+3)^2 \leq 0$

$[2x - (2x+3)][2x + 2x + 3] \leq 0$

$(2x - 2x - 3)(2x + 2x + 3) \leq 0$

$-3(4x+3) \leq 0$

$-12x - 9 \leq 0$

$-12x \leq 9$

$x \geq \frac{9}{-12}$

$x \geq -\frac{3}{4}$

$S = [-\frac{3}{4}; +\infty[$

Ex 7

1. $\frac{1}{2x+4} - \frac{2}{x-1} = \frac{1\times(x-1) - 2(2x+4)}{(2x+4)(x-1)} = \frac{x-1-4x-8}{(2x+4)(x-1)} = \frac{-3x-9}{(x-1)(2x+4)}$

2. $\frac{1}{2x+4} \geq \frac{2}{x-1} \iff \frac{1}{2x+4} - \frac{2}{x-1} \geq 0$

$\iff \frac{-3x-9}{(x-1)(2x+4)} \geq 0$

$-3x-9 = 0$ | $x-1=0$ | $2x+4=0$
$-3x = 9$ | $x = 1$ | $2x = -4$
$x = \frac{9}{-3}$ | | $x = \frac{-4}{2}$
$x = -3$ | valeurs interdites | $x = -2$

x	$-\infty$	-3		-2		1	$+\infty$
$-3x-9$	$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$
$x-1$	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$
$2x+4$	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$
$\frac{-3x-9}{(x-1)(2x+4)}$	$+$	0	$-$	||	$+$	||	$-$

$S =]-\infty; -3] \cup]-2; 1[$

<u>Ex 8 :</u>

1. a. $C(20)=20^2-10\times20+500=700$ Coût de production pour 20 chaises 700 €

b . $R(20)=20\times50=1000$ Recette pour 20 chaises : 1000 €

Donc le bénéfice pour 20 chaises vendues est 1000 – 700 = 300 €

2. $R(x)=50\times x$

3. a.

x	5	20	40	60	70
C(x)	475	700	1700	3500	4700

x	5	20	40	60	70
R(x)	250	1000	2000	3000	3500

Fenêtre adaptée : pour X de 0 à 70 avec un pas de 5
et Y de 0 à 5000 avec un pas de 100

b. Il y a un bénéfice dès que la courbe de R (droite) est au dessus de la courbe de C.
Donc à l'aide de la calculatrice on voit que x doit être compris entre 10 et 50 , donc il faut vendre entre 10 et 50 chaises pour faire un bénéfice (utiliser la fonction G-Solv de la calculatrice)

4. $R(x) \geq C(x) \Leftrightarrow 50x \geq x^2 - 10x + 500 \Leftrightarrow 50x - x^2 + 10x - 500 \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 + 60x - 500 \geq 0$

0r $(50-x)(x-10) = 50 \times x - 50 \times 10 - x^2 + x \times 10 = 50x - 500 - x^2 + 10x = -x^2 + 60x - 500$

Donc $R(x) \geq C(x) \Leftrightarrow (50-x)(x-10) \geq 0$

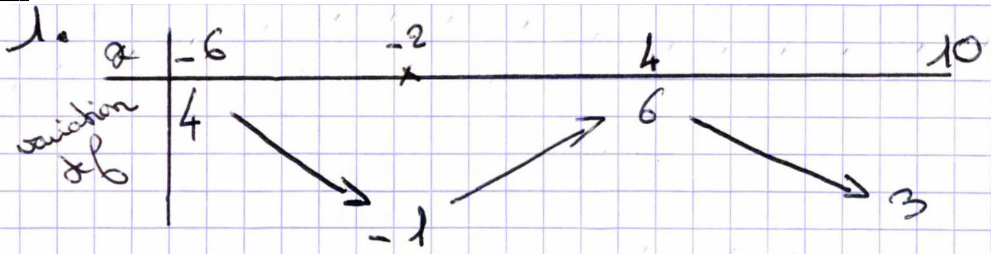
$50 - x = 0 \Leftrightarrow x = 50$ $\quad$ $x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 10$

x	5		10		50		70
50 − x		+	|	+	0	−	
x − 10		−	0	+	|	+	
(50−x)(x−10)		−	0	+	0	−	

S = [10;50] On retrouve le résultat précédent

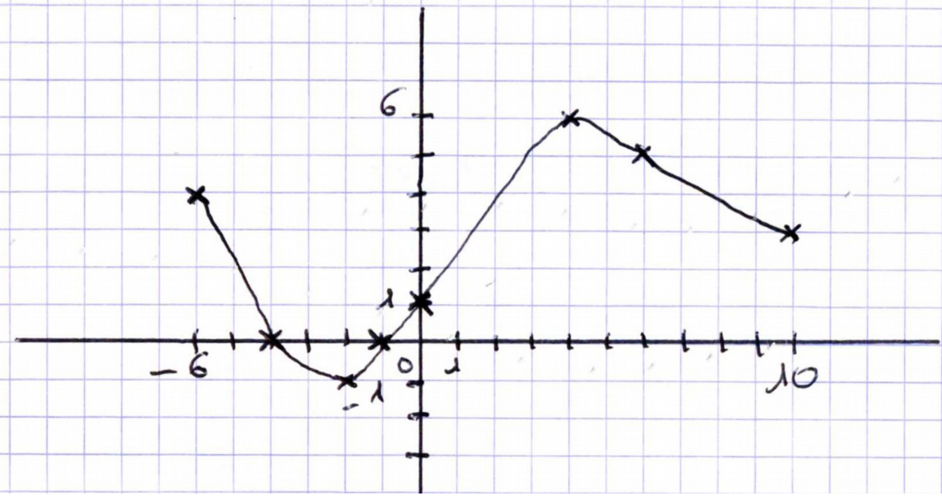
Ex 9 :

1.



2. Elle passe par (−4;0) et (−1;0) ; (0;1) ; (6;5)

2.



Ex 10 :

1.*h* est décroissante sur les intervalles [-5 ;-3] et [1;4] et elle est croissante sur [-3;1]

2. a. L'image de 4 est 2 par la fonction h

   b. -2 va avoir deux antécédents par h ; l'un dans]-5 ;-3[et l'autre dans]-3;1[

3. si x appartient à [-3;1] alors $-3 \leq h(x) \leq 4$

   si x appartient à [-5;4] alors $-3 \leq h(x) \leq 4$

Ex 11 :

Partie A :

1. x doit appartenir à [0;20]
2. DP = AD – AP = 20 – AM = 20 -x
3. $f(x) = AM \times AM = x^2$

L'aire de DNC est l'aire du carré ABCD moins l'aire du carré AMNP moins l'aire du triangle rectangle NPD moins l'aire du trapèze MBCN

$$A_{ABCD} = 20^2 = 400$$

$$A_{AMNP} = f(x) = x^2$$

$$A_{NPD} = \frac{PN \times PD}{2} = \frac{x \times (20-x)}{2} = \frac{20x - x^2}{2}$$

$$A_{MBCN} = \frac{(MN+BC) \times MB}{2} = \frac{(x+20) \times (20-x)}{2} = \frac{20x - x^2 + 400 - 20x}{2} = \frac{-x^2+400}{2}$$

$$g(x) = 400 - x^2 - \frac{20x - x^2}{2} - \frac{-x^2+400}{2} = \frac{400 \times 2 - x^2 \times 2 - 20x + x^2 + x^2 - 400}{2} = \frac{400 - 20x}{2} = 200 - 10x$$

Partie B :

1. La courbe bleue est la courbe de g car c'est une droite et g est une fonction affine
2. $f(x) \geq g(x)$ la courbe de f (rouge) est au dessus de la courbe de g (bleue) pour x supérieur ou égal à 10.

S = [10;20]

Le carré AMNP aura une aire supérieure au triangle NCD dès que AM sera supérieur à 10.

Partie C :

1. $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow x^2 \geq -10x + 200 \Leftrightarrow x^2 + 10x - 200 \geq 0$
2. $(x-10)(x+20) = x^2 + 20 \times x - 10 \times x - 10 \times 20 = x^2 + 20x - 10x - 200 = x^2 + 10x - 200$
3. $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow x^2 + 10x - 200 \geq 0 \Leftrightarrow (x-10)(x+20) \geq 0$

$x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 10$ $x + 20 = 0 \Leftrightarrow x = -20$

x	0		10		20
$x-10$		$-$	0	$+$	
$x+20$		$+$	|	$+$	
$(x-10) \times (x+20)$		$-$	0	$+$	

Le produit est positif dès que x appartient à [10;20]

Ex 12 :

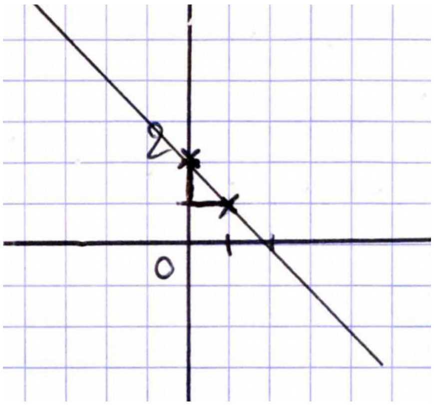
x	$-\infty$		$+\infty$
f(x)		↘	

f est de la forme *f(x) = a x + b*

f(2) = 0   donc 2 a + b = 0 ; le minimum de f sur [-5;5] est -3 donc *f(5)* = -3 donc 5 a + b = -3

Il faut résoudre le système $\begin{matrix} 2a+b=0 \\ 5a+b=-3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} b=-2a \\ 5a-2a=-3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} b=-2a \\ 3a=-3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} b=-2a \\ a=\frac{-3}{3}=-1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} b=-2\times(-1)=2 \\ a=-1 \end{matrix}$

donc $f(x) = -x + 2$ La droite représentant *f* passe par (0;2) et a pour coefficient directeur -1



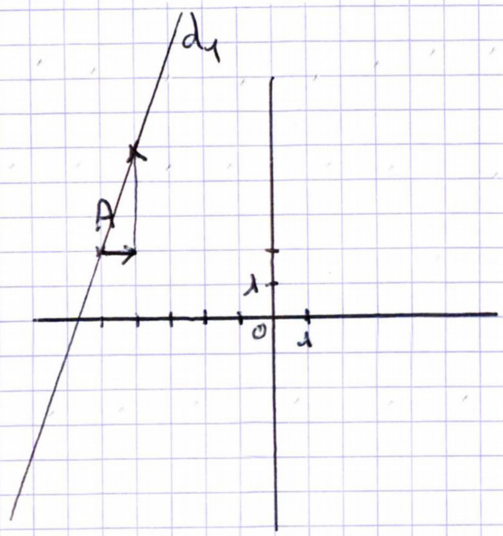
Ex 13 :

1. a. Aussitôt après l'injection, il y a 5 m mol. L- ¹ de médicament dans le sang
   b. Au bout de 8 h , il y a 1,5 m mol. L- ¹ de médicament dans le sang
   c. Pour la concentration diminue de moitié, il faut qu'il y ait 2,5 m mol. L- ¹ de médicament dans le sang soit au bout de 4,5 h après l'injection
2. Au cours du temps cette concentration de médicament diminue dans le sang.
3. La vitesse d'élimination diminue au cours du temps car la pente de la courbe diminue au cours du temps

5/ Droites et systèmes :

Ex 1

1.



2. Une équation cartésienne de d_1 sera de la forme $ax+by+c=0$ avec

$\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ vecteur directeur

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \begin{matrix}\Rightarrow b=-1\\ \Rightarrow a=3\end{matrix}$

donc $3x-y+c=0$

$A \in d_1 \Rightarrow 3x_A - y_A + c = 0$

$3\times(-5) - 2 + c = 0$

$c = 17$

donc $\boxed{3x-y+17=0}$

3. a. $\vec{BC}\begin{pmatrix}x_C - x_B\\y_C - y_B\end{pmatrix}$

$\vec{BC}\begin{pmatrix}8-3\\5-4\end{pmatrix}$ $\vec{BC}\begin{pmatrix}5 \to -b\\1 \to a\end{pmatrix}$

donc une équation cartésienne de (BC) sera de la forme $x - 5y + c = 0$

$B \in (BC) \Rightarrow x_B - 5y_B + c = 0$

$3 - 5\times4 + c = 0$

$c = 17$

donc $\boxed{x-5y+17=0}$

b. A, B, C st alignés $\Leftrightarrow A \in (BC)$

$x_A - 5y_A + 17 = -5 - 5\times2 + 17 = 2 \neq 0$ donc $A \notin (BC) \Rightarrow$ A, B et C ne st pas alignés

4 a. vecteur directeur de d_1 $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

vecteur directeur de (BC) $\vec{BC}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$

$\det(\vec{u}, \vec{BC}) = \begin{vmatrix}1 & 5\\3 & 1\end{vmatrix} = 1\times1 - 3\times5 = -14 \neq 0$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{BC}$ ne st pas colinéaires donc les dtes d_1 et (BC) ne st pas parallèles

donc elles st sécantes en un pt M

b. Pour trouver les coordonnées de M, il faut résoudre le système

$$\begin{cases} 3x - y + 17 = 0 \\ x - 5y + 17 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3(5y - 17) - y + 17 = 0 \\ x = 5y - 17 \end{cases} \iff \begin{cases} 15y - 51 - y + 17 = 0 \\ x = 5y - 17 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 14y = 51 - 17 = 34 \\ x = 5y - 17 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{34}{14} = \frac{17}{7} \\ x = 5 \times \frac{17}{7} - 17 = \frac{5 \times 17}{7} - \frac{17 \times 7}{7} = -\frac{2 \times 17}{7} = -\frac{34}{7} \end{cases}$$

$H\left(-\frac{34}{7} ; \frac{17}{7}\right)$

Vérifiez

Ex 2

Partie A
$$\begin{cases} 2x + 9y = 37 & \times 5 \\ -5x + 6y = 31 & \times 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 10x + 45y = 185 \\ -10x + 12y = 62 \end{cases}$$

Par addition membre à membre on obtient

$\cancel{10x} + 45y \cancel{- 10x} + 12y = 185 + 62$

$57y = 247$

$y = \frac{247}{57} = \frac{13}{3}$

donc $2x + \cancel{9}^{3} \times \frac{13}{\cancel{3}} = 37$

$2x = 37 - 3 \times 13 = -2$

$x = \frac{-2}{2} = -1$

$S = \left\{ \left(-1 ; \frac{13}{3}\right) \right\}$

Partie B

1a. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5+4 \\ 3-5 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to -b \\ \to a \end{matrix}$ donc une équation cartésienne de (AB) sera de la forme

$-2x - 9y + c = 0$

$A \in (AB) \iff -2x_A - 9y_A + c = 0$

$-2 \times (-4) - 9 \times (5) + c = 0$

$c = 37$

donc $-2x - 9y + 37 = 0$

$\iff 2x + 9y - 37 = 0$

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 1+5 \\ 6-1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to -b \\ \to a \end{matrix}$ donc une équation cartésienne de (CD) sera de la forme

$5x - 6y + c = 0$

$C \in (CD) \iff 5x_C - 6y_C + c = 0$

$5 \times (-5) - 6 \times 1 + c = 0$

$c = 31$

donc $5x - 6y + 31 = 0$

$\iff -5x + 6y - 31 = 0$

b. (AB) $2x+9y-37=0 \iff 2x+9y=37$

(CD) $-5x+6y-31=0 \iff -5x+6y=31$

c. Si (AB) et (CD) st sécantes, elles ont pour intersection un point dont les coordonnées vérifient le système de la partie A

donc (AB) et (CD) st sécantes en $F\left(-1; \frac{13}{3}\right)$

2. a. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5+4\\1-5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}\begin{matrix}\to -b\\ \to a\end{matrix}$ une équation de (AC) sera de la forme $-4x+y+c=0$

$A\in(AC) \iff -4x_A+y_A+c=0$

$-4\times(-4)+5+c=0$

$21+c=0$

$c=-21$

donc $-4x+y-21=0$

$\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}5-1\\3-6\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}\begin{matrix}\to -b\\ \to a\end{matrix}$ (DB) a donc pour équation cartésienne $-3x-4y+c=0$

$D\in(DB) \iff -3\times1-4\times6+c=0$

$c=27$

donc $-3x-4y+27=0$

b) vecteur directeur de (AC) $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$

vecteur directeur de (DB) $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{DB})=\begin{vmatrix}-1&4\\-4&-3\end{vmatrix}$

$=-1\times(-3)-(-4)\times4$

$=3-16=-13\neq0$

les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$ ne st pas colinéaires
donc (AC) et (DB) ne st pas parallèles
les dtes st sécantes

leur point d'intersection a des coordonnées qui vérifient le système

$$\begin{cases}-3x-4y+27=0\\-4x+y-21=0 \quad \times4\end{cases} \iff \begin{cases}-3x-4y+27=0\\-16x+4y-84=0\end{cases}$$

en additionnant membre à membre $-3x\cancel{-4y}+27-16x\cancel{+4y}-84=0$

$-19x=57$

$x=-\frac{57}{19}=-3$

donc $-3\times(-3)-4y+27=0$

$-4y=-27-9=-36$

$y=\frac{-36}{-4}=9$

$G(-3;9)$

Vérification

3. $\vec{FG}\begin{pmatrix}-3+1\\ 9-\frac{13}{3}\end{pmatrix}$ $\vec{FG}\begin{pmatrix}-2\\ \frac{14}{3}\end{pmatrix}$ $\begin{matrix}\rightarrow -b\\ \rightarrow a\end{matrix}$

une équation de (FG) sera de la forme $\frac{14}{3}x+2y+c=0$

$G\in(FG) \Leftrightarrow \frac{14}{3}\times x_G+2y_G+c=0$

$\frac{14}{3}\times(-3)+2\times 9+c=0$

$c=-18+14=-4$

donc $\frac{14}{3}x+2y-4=0$

4. Si H, F et G st alignés $H\in(FG)$

H milieu de [BC]

$H\left(\frac{x_B+x_C}{2};\frac{y_B+y_C}{2}\right)$

$H\left(\frac{5-5}{2};\frac{3+1}{2}\right)$

$H(0;2)$

$\frac{14}{3}\times x_H+2y_H-4=\frac{14}{3}\times 0+2\times 2-4=0$

donc $H\in(FG)$

les pts st alignés

Ex 3 :

1. Coefficient directeur de (MN) $a_{MN}=\frac{y_M-y_N}{x_M-x_N}=\frac{2500-10}{100-1500}=\frac{2490}{-1400}=\frac{-249}{140}$

donc $y=\frac{-249}{140}x+p$ est une équation réduite de (MN).

M appartient à la droite (MN) donc

$y_M=\frac{-249}{140}x_M+p \Leftrightarrow 2500=\frac{-249}{140}\times 100+p \Leftrightarrow 2500+\frac{249\times 100}{140}=p \Leftrightarrow p=\frac{18745}{7}$

donc $y=\frac{-249}{140}x+\frac{18745}{7}$ soit $y=-1{,}78x+2677{,}86$

2. Si x = 500 y = - 1,78 x 500 + 2677,86 soit environ 1787,86. Si le prix est de 500 € par chaise, il en vend chaque mois 1788.

3. Il faut résoudre

$-1{,}78\times x+2677{,}86>1000 \Leftrightarrow -1{,}78\times x>1000-2677{,}86 \Leftrightarrow -1{,}78x>-1677{,}86 \Leftrightarrow x<\frac{-1677{,}86}{-1{,}78}$

donc x < 942

Il ne doit pas dépasser 942 € pour une chaise.

Ex 4 :

1. pour 150 km :

Formule A : 75 + 0,4 x 150 = 135 €

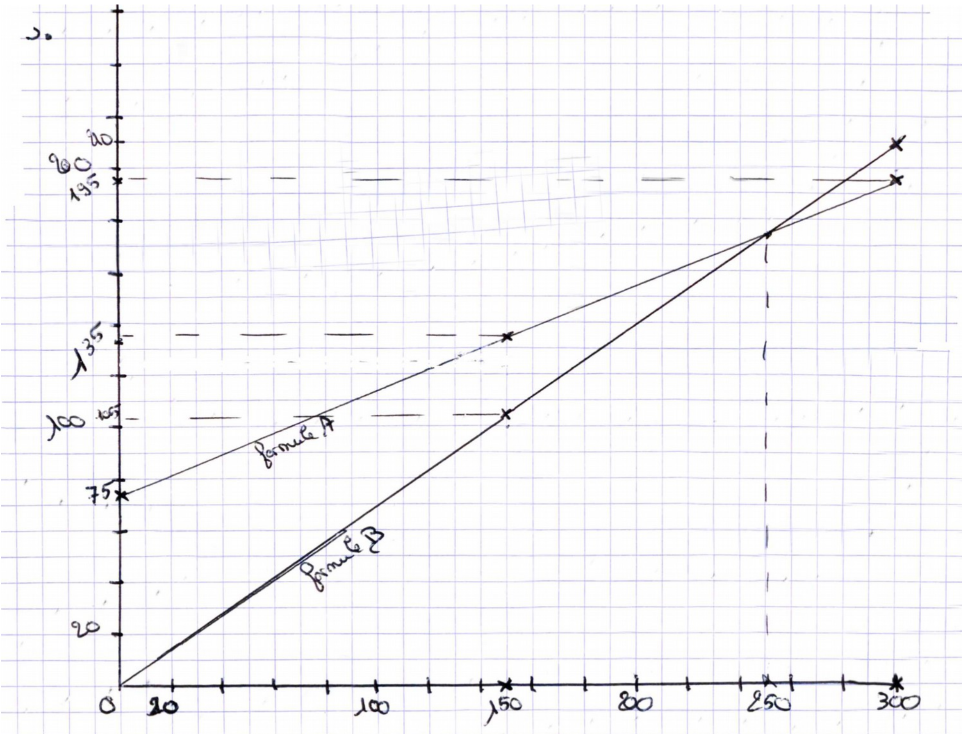
Formule B : 0,7 x 150 = 105 € donc il doit choisir la formule B pour 150 km parcourus

pour 300 km :

Formule A : 75 + 0,4 x 300 = 195 €

Formule B : 0,7 x 300 = 210 € donc il doit choisir la formule A pour 300 km parcourus

2. a. $y_A = 75 + 0{,}4\,x$ et $y_B = 0{,}7\,x$



c. Si $x < 250$ la formule B est plus avantageuse
Si on fait plus de 250 km, la formule A est plus avantageuse

d. Pour que la formule A soit plus avantageuse, on doit résoudre

$$75 + 0{,}4\,x < 0{,}7\,x \Leftrightarrow 75 < 0{,}7\,x - 0{,}4\,x \Leftrightarrow 75 < 0{,}3\,x \Leftrightarrow \frac{75}{0{,}3} < x \Leftrightarrow 250 < x$$

On retrouve le résultat de la question précédente

6/ Pourcentages et statistiques

Ex 1 :

1. Faux car pour D et T, on n'a pas d'intensité.
2. Effectif total : 3 +13 + 7 + 1 + 2 + 1 + 4 = 31

Ceux qui ne sont pas des cyclones sont au nombre de 16 soit plus de la moitié de l'effectif total donc Vrai

3. Nombre de ceux qui ont crée des dégâts structurels : 7

$\frac{7}{31} \simeq 0,23$ soit 23 % donc la réponse est Vraie

4. Nombre des cyclones qui n'ont pas crée de dégâts structurels : 8

Nombre de cyclones : 7 + 1 + 2 + 1 + 4 = 15

$\frac{8}{15} \simeq 0,53$ soit 53 % donc la réponse est Vraie

Ex 2 :

1. On multiplie les différents coefficients multiplicateurs

2013/ 14 : 1 – 22,9 % = 1 – 0,229 = 0,771
2014/ 15 : 1 – 4,8 % = 1 – 0,048 = 0,952
2015/ 16 : 1 – 8,1% = 1 – 0,081= 0,919
2016/ 17 : 1 +9,8 % = 1 + 0,098= 1,098
0,771 x 0,952 x 0,919 x 1,098 = 0,7406 coefficient multiplicateur global
Taux d'évolution global 0,7406 – 1 = - 0,2594 soit **– 25,94 %**

2. On cherche le taux d'évolution réciproque de – 25, 94 %

Coefficient multiplicateur réciproque : $\frac{1}{1-0,2594} = \frac{1}{0,7406} \simeq 1,3502$

Taux d'évolution réciproque 1,3502 – 1 = 0,3502 donc **35,02 %**

Donc il faut augmenter le nombre de brevets de 35,02 % pour revenir au taux de 2013

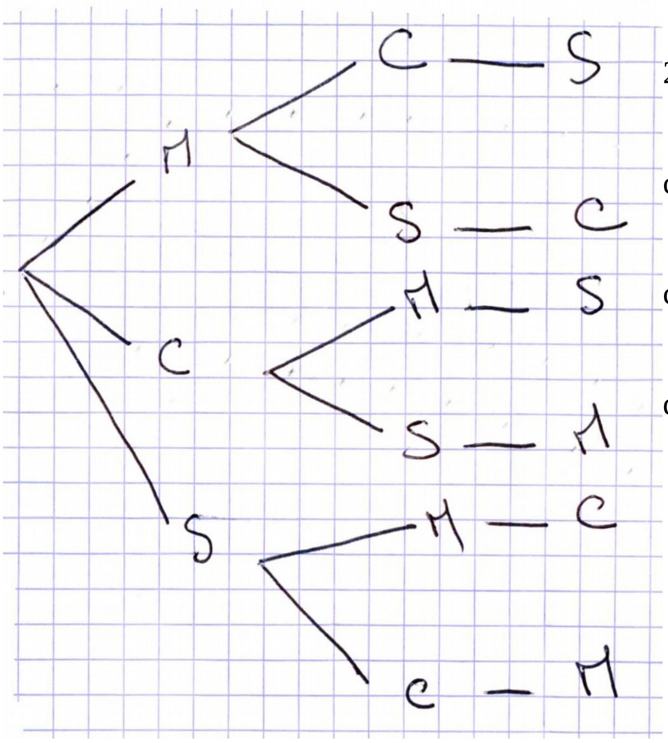
3. $V_{2013} \times (1-0,2594) = V_{2017} = 1110$

Donc $V_{2013} = \frac{1110}{0,7406} = 1498,78$ soit **1499** dépôts en 2013.

<u>7/ Probabilités :</u>

<u>Ex 1 :</u>

1. a.



b. Il peut organiser sa séance de 6 façons.

2. a . A = {C M S ; C S M}

B = { C S M ; S M C ; S C M }

b. A ∩ B : « La séance commence par le Crossfit et la corde à sauter est avant la musculation »

il n' y a qu'une seule issue C S M

c. A U B : « La séance commence par le Crossfit ou la corde à sauter est avant la musculation

il y a comme issues : C M S ; C S M ; S M C ; S C M

d. $\bar{B}$: « La corde à sauter est après la musculation »

il y a trois issues (celles ui ne sont pas dans B)

<u>Ex 2 :</u>

1.

	1	**2**	**3**	**4**
1	0	1	2	3
2	1	0	1	2
3	2	1	0	1
4	3	2	1	0

2. Les résultats possibles sont 0,1,2 et 3

Issue	0	1	2	3
Probabilité	$\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$	$\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$	$\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$	$\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$

3. a. $p=1-p(0)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

b. $p=p(2)+p(3)=\frac{4}{16}+\frac{2}{16}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$

c. $p=p(2)+p(3)=\frac{3}{8}$

4. Le résultat doit être 2 et il y 3 et 1 ou 4 et 2 donc $p=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$

5. Le résultat doit être soit 1, 2 ou 3. Donc $p=1-p(0)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

Ex 3 :

1. $P(T)=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$ $P(C)=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$ $P(F)=\frac{12}{32}=\frac{3}{8}$

2 a. T ∩ F : « La carte est une figure à trèfle» $P(T\cap F)=\frac{3}{32}$

b. T U F : « La carte est une figure ou un trèfle » $P(T\cup F)=P(T)+P(F)-P(T\cap F)=\frac{8}{32}+\frac{12}{32}-\frac{3}{32}=\frac{17}{32}$

3. a. T et C sont des événements incompatibles (ils ne peuvent se produire à la fois)

b. $P(T\cup C)=P(T)+P(C)=\frac{8}{32}+\frac{8}{32}=\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$

4. $p=1-P(F)=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$

5. $P(\bar{C}\cup\bar{F})=P(\overline{C\cap F})=1-P(C\cap F)=1-\frac{3}{16}=\frac{13}{16}$

Ex 4 :

1. 64 % de femmes donc $\frac{64}{100}\times 600=384$ donc 600 – 384 = 216 hommes

50 % de 384 : $\frac{50}{100}\times 384=192$ 37,5 % de 384 : $\frac{37,5}{100}\times 384=144$

25 % de 216 : $\frac{25}{100}\times 216=54$

Formule	S	R	L	Total
Femme	384 – 192 – 384 = 48	192	144	384
Homme	216 /2 = 108	54	216 – 54 – 108 = 54	216
Total	48 + 108 = 156	192 + 54 = 246	144 + 54 = 198	600

2. $P=\frac{54}{600}=\frac{9}{100}=0,09$

3. $P=P(F\cup S)=P(F)+P(S)-P(F\cap S)=\frac{384}{600}+\frac{156}{600}-\frac{48}{600}=\frac{492}{600}=\frac{41}{50}=0,82$

4. $P=1-P(L)=1-\frac{198}{600}=\frac{402}{600}=0,67$

5. Parmi les 198 personnes ayant choisi la formule Liberté

$P=\frac{144}{198}=\frac{8}{11}$

8/ Géométrie plane :

Ex 1 :

1. D est inscrit dans le cercle de diamètre [AB] donc le triangle ABD est rectangle en D.
2. Dans ce triangle rectangle ABD, d'après le théorème de Pythagore

$AB^2 = AD^2 + DB^2 \iff AB^2 = (4\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2$

$\iff AB^2 = 16 \times 2 + 9 \times 2 \iff AB^2 = 32 + 18 \iff AB^2 = 50$

$AB = \sqrt{50} \iff AB = \sqrt{(2\times 25)} = 5\sqrt{2}$

3. a. Dans le triangle rectangle ABD $\tan(\widehat{BAD}) = \frac{AD}{DB} = \frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{3}{4}$

$\widehat{BAD} = \tan^{-1}(0{,}75) = 36{,}9°$

b. BCD est un triangle isocèle car DC = CB (rayons du cercle)

$\widehat{DCB} = 180 - 2\times\widehat{CBD} = 180 - 2\times 36{,}9 = 106{,}2°$

car les angles à la base d'un triangle isocèle sont de même mesure

4. Dans le triangle BFE , les segments [DA] et [FE] sont parallèles et D appartient à [FB] et A appartient à [BE]

d'après le théorème de Thalès $\frac{BD}{BF} = \frac{BA}{BE} = \frac{AD}{FE}$

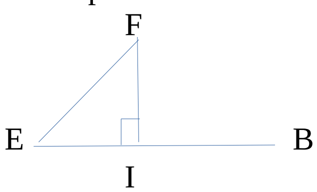
donc $\frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+FD} = \frac{5\sqrt{2}}{5\sqrt{2}+2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{7\sqrt{2}} = \frac{5}{7}$ donc

$5(4\sqrt{2}+FD) = 7\times 4\sqrt{2} \Leftrightarrow 20\sqrt{2}+5FD = 28\sqrt{2} \Leftrightarrow 5FD = 28\sqrt{2}-20\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow FD = \frac{8\sqrt{2}}{5} = 1{,}6\sqrt{2}$

5. Vu que (AD) et (FE) sont parallèles, les angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{BEF}$ sont égaux. Or

$\widehat{BAD} = 180 - \widehat{ADB} - \widehat{ABD} = 180 - 90 - 36{,}9 = 52{,}1°$ Donc $\widehat{BAD} = \widehat{BEF} = \widehat{AEF} = 52{,}1°$

6. La distance de F à la droite (AB) est la longueur du segment [FI] obtenu en traçant la perpendiculaire à (AB) passant par F. Donc on peut former un triangle rectangle



$\widehat{BEF} = 52{,}1°$ donc $\sin(\widehat{BEF}) = \frac{FI}{EF}$

$FI = EF \times \sin(\widehat{BEF}) = 4{,}2\sqrt{2}\times\sin(52{,}1°) \simeq 4{,}7$

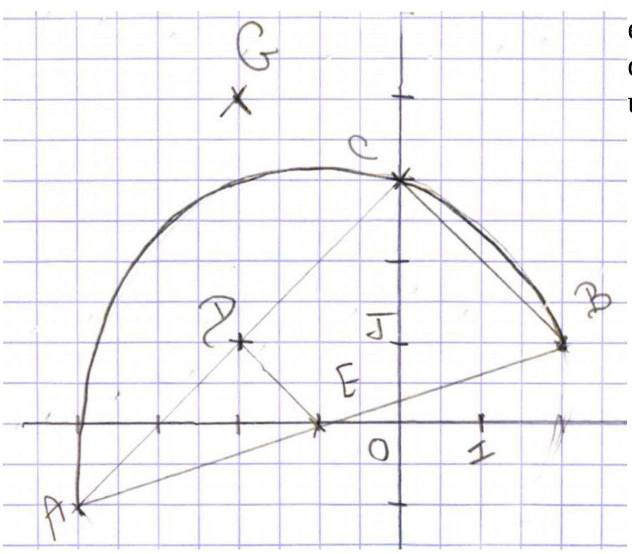
Calcul de EF grâce au théorème de Thalès

de la question 4 $\frac{BD}{BF} = \frac{BA}{BE} = \frac{AD}{FE}$ donc $\frac{5}{7} = \frac{3\sqrt{2}}{FE}$

$FE = \frac{7\times 3\sqrt{2}}{5} = 4{,}2\sqrt{2}$

Ex 2 :

1.



2. D et E sont les milieux respectifs des segments [AC] et [AB] dans le triangle ACB. Donc d'après le théorème des milieux, (DE) et (CB) sont parallèles donc DEBC est un trapèze.

3. a. E milieu de [AB]

$x_E = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-4+2}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

$y_E = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-1+1}{2} = \frac{0}{2} = 0$ E(-1;0)

b. Calcul de EB

$EB = \sqrt{(x_E - x_B)^2 + (y_E - y_B)^2} = \sqrt{(-1-2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

c. Calcul de EC

$$EC=\sqrt{(x_E-x_C)^2+(y_E-y_C)^2}=\sqrt{(-1-0)^2+(0-3)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$

EB = EC donc C appartient au cercle de centre E passant par B.

d. C appartient au cercle de diamètre [AB] (car E est le milieu de [AB]) donc le triangle ABC est rectangle en C.

4. Il faut calculer GA et GB

$$GA=\sqrt{(x_G-x_A)^2+(y_G-y_A)^2}=\sqrt{(-2+4)^2+(4+1)^2}=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}$$

$$GB=\sqrt{(x_G-x_B)^2+(y_G-y_B)^2}=\sqrt{(-2-2)^2+(4-1)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

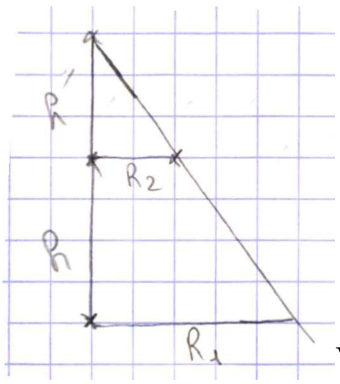
$GA \neq GB$ donc G n'appartient pas à la médiatrice de [AB]

Ex 4 :

1. Premier objet

- premier cône de rayon R_2 = 1 et de hauteur h' à calculer

On peut utiliser le théorème de Thalès :



$$\frac{h'}{h+h'}=\frac{R_2}{R_1} \Leftrightarrow \frac{h'}{10+h'}=\frac{1}{5} \Leftrightarrow 5\times h'=1\times(10+h') \Leftrightarrow 5h'-h'=10 \Leftrightarrow 4h'=10$$

$$h'=\frac{10}{4}=2{,}5$$

Volume $\frac{1}{3}\times\pi\times R_2^2\times h'=\frac{1}{3}\pi\times1^2\times2{,}5=\frac{2{,}5\pi}{3}cm^3$

- deuxième cône de rayon R_1 = 5 et de hauteur h+h' = 10 +2,5 = 12,5

Volume $\frac{1}{3}\times\pi\times R_1^2\times(h+h')=\frac{1}{3}\pi\times5^2\times12{,}5=\frac{312{,}5\pi}{3}cm^3$

Volume de l'objet 1 : $\frac{312{,}5\pi}{3}-\frac{2{,}5\pi}{3}=\frac{310\pi}{3}cm^3=\frac{310\pi}{3}\times10^{-3}dm^3=\frac{0{,}31\pi}{3}dm^3=\frac{0{,}31\pi}{3}L$

donc il se remplit en $\frac{0{,}31\pi}{3}min\simeq0{,}33\,min$

Deuxième objet :

C'est une demi-boule : $\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\pi\times R^3=\frac{4}{6}\times\pi\times10^3=\frac{2000\pi}{3}cm^3=\frac{2000\pi}{3}\times10^{-3}dm^3=\frac{2\pi}{3}dm^3=\frac{2\pi}{3}L$

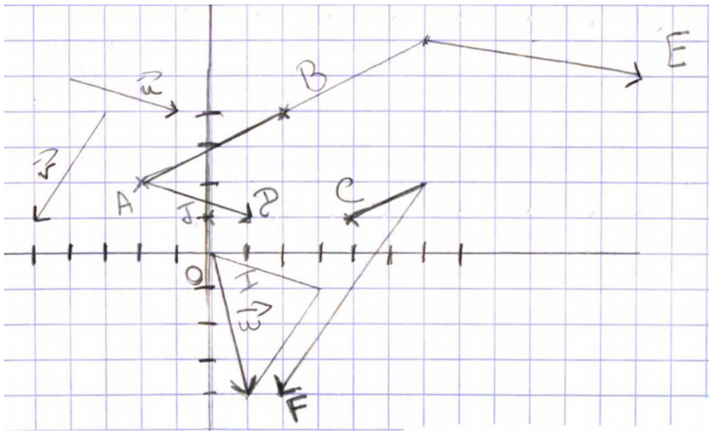
Il se remplit 10 L en 1 min donc en $\frac{\frac{2\pi}{3}}{10}=\frac{2\pi}{3}\times\frac{1}{10}=\frac{0{,}2\pi}{3}min\simeq0{,}21\,min$

Le second objet se remplira en premier.

<u>9/ Vecteurs :</u>

<u>Ex 1 :</u>

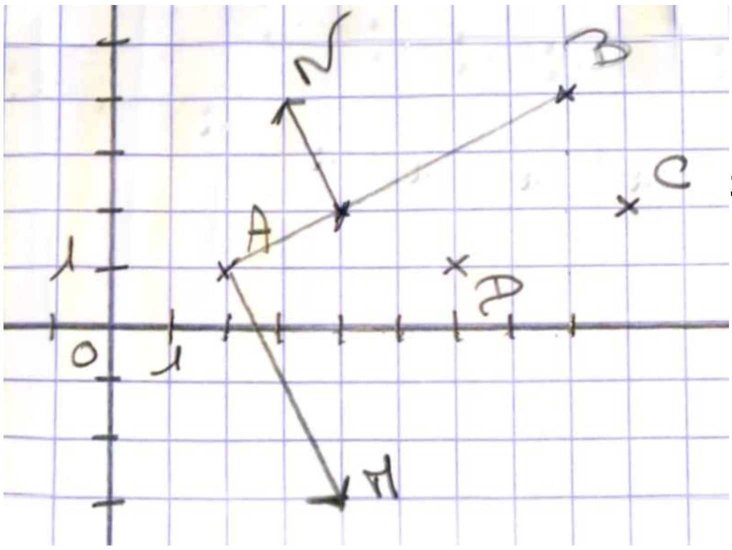
1. A(-2;2)   B(2;4)   C(4;1)



2. $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$

<u>Ex 2 :</u>

1.



2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}8-2\\4-1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}x_C-x_B\\y_C-y_B\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}9-8\\2-4\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

3. a. $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{BC}$

$$x_M-x_A=2(x_C-x_B)$$
$$y_M-y_A=2(y_C-y_B)$$

$$x_M-2=2(9-8)$$
$$y_M-1=2(2-4)$$

M(4 ;-3)

$$x_M=2+2=4$$
$$y_M=-4+1=-3$$

$$x_N-x_A=\frac{1}{3}x_{\overrightarrow{AB}}-x_{\overrightarrow{BC}}$$
$$y_N-y_A=\frac{1}{3}y_{\overrightarrow{AB}}-y_{\overrightarrow{BC}}$$

b. $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$

$$x_N-2=\frac{1}{3}\times 6-1$$
$$y_N-1=\frac{1}{3}\times 3-(-2)$$

N(3;4)

$$x_N=2-1+2=3$$
$$y_N=1+2+1=4$$

4. a.

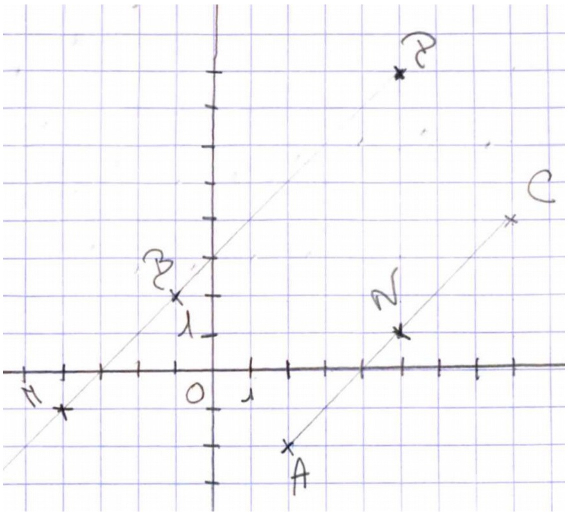
$\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}x_N-x_A\\y_N-y_A\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3-2\\4-1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix}x_M-x_D\\y_M-y_D\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}4-6\\-3-1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$

b. $det(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{DM})=\begin{vmatrix}1&-2\\3&-4\end{vmatrix}=1\times(-4)-3\times(-2)=-4+6=2\neq 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{DM}$ ne sont pas colinéaires.

5. Les vecteurs $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{DM}$ ne sont pas colinéaires donc (AN) et (DM) ne sont pas parallèles donc on n'a pas de trapèze.

Ex 3 :

1.



2. a. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-1-2\\2+2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$

b. $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}x_D-x_C=-3\\y_D-y_C=4\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}x_D=-3+8=5\\y_D=4+4=8\end{matrix}$ D(5;8)

c. $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$ donc ABDC est un parallélogramme

3. a. N est le milieu de [AC] donc $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

b. $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{matrix}x_N-x_A=\frac{1}{2}(x_C-x_A)\\y_N-y_A=\frac{1}{2}(y_C-y_A)\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}x_N=\frac{1}{2}(8-2)+2\\y_N=\frac{1}{2}(4+2)-2\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}x_N=5\\y_N=1\end{matrix}$ N(5;1)

4. $\overrightarrow{BM}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \begin{matrix}x_M-x_B=\frac{-1}{2}(x_D-x_B)\\y_M-y_B=\frac{-1}{2}(y_D-y_B)\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}x_M=\frac{-1}{2}(5+1)-1\\y_M=\frac{-1}{2}(8-2)+2\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}x_M=-4\\y_M=-1\end{matrix}$ M(-4 ;-1)

5. $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x_M-x_A\\y_M-y_A\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-4-2\\-1+2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-6\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{NB}\begin{pmatrix}x_B-x_N\\y_B-y_N\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-1-5\\2-1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-6\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{NB}$ car ils ont les mêmes coordonnées donc AMBN est un parallélogramme

Ex 4 :

2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1-5\\3-7\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}x_C-x_B\\y_C-y_B\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}6-1\\1-3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x_D-x_C\\y_D-y_C\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-14-6\\9-1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-20\\8\end{pmatrix}$

3. a. On s'aperçoit que $\overrightarrow{CD}=-4\times\overrightarrow{BC}$

b. Donc comme k existe alors les vecteurs sont colinéaires

c. Comme les vecteurs sont colinéaires et qu'ils ont C en commun on peut affirmer que les points C,B et D sont alignés.

4. $\overrightarrow{AE}=4\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E-x_A=4\times(-4) \\ y_E-y_A=4\times(-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E=-16+5=-11 \\ y_E=-16+7=-9 \end{cases}$ E(-11;-9)

5. a. $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} x_E-x_D \\ y_E-y_D \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -11+14 \\ -9-9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -18 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C-x_A \\ y_C-y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6-5 \\ 1-7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

$det(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{AC})=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -18 & -6 \end{vmatrix}=3\times(-6)-1\times(-18)=-18+18=0$ les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires donc les droites (DE) et (AC) sont parallèles

b. ACED est un trapèze.

Ex 5 :

1. M est le milieu de [AB] donc $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{12+2}{2}=\frac{14}{2}=7$ $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{1+9}{2}=\frac{10}{2}=5$ M(7;5)

N est le milieu de [BC] donc $x_N=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{2-2}{2}=\frac{0}{2}=0$ $y_N=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{9-1}{2}=\frac{8}{2}=4$ N(0;4)

2. a. A,G et N sont alignés donc les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires

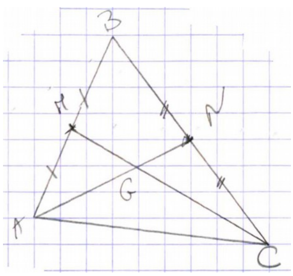
$\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} x_G-x_A \\ y_G-y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-12 \\ y-1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix} x_N-x_A \\ y_N-y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0-12 \\ 4-1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \end{pmatrix}$

$det(\overrightarrow{AG};\overrightarrow{AN})=\begin{vmatrix} x-12 & -12 \\ y-1 & 3 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (x-12)\times3-(y-1)\times(-12)=0 \Leftrightarrow 3x-36+12y-12=0$

$\Leftrightarrow 3x+12y-48=0 \Leftrightarrow 12y=-3x+48 \Leftrightarrow y=\frac{-3}{12}x+\frac{48}{12} \Leftrightarrow y=-0{,}25x+4$

b. $\overrightarrow{CG}\begin{pmatrix} x_G-x_C \\ y_G-y_C \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-(-2) \\ y-(-1) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+2 \\ -0{,}25x+4+1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+2 \\ -0{,}25x+5 \end{pmatrix}$

c. G est à l'intersection des médianes donc G appartient à la droite (CM)



donc C,G et M sont alignés donc les vecteurs $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{CM}$ sont colinéaires

$\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} x_M-x_C \\ y_M-y_C \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7-(-2) \\ 5-(-1) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$

$det(\overrightarrow{CG};\overrightarrow{CM})=\begin{vmatrix} x+2 & 9 \\ -0{,}25x+5 & 6 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (x+2)\times6-(-0{,}25x+5)\times(9)=0 \Leftrightarrow 6x+12+9\times0{,}25x-9\times5=0$

$\Leftrightarrow 6x+12+2{,}25x-45=0 \Leftrightarrow 8{,}25x=45-12=33 \Leftrightarrow x=\frac{33}{8{,}25}=4$

Donc $x_G=4$ et $y_G=-0{,}25\times4+4=3$ G(4;3)

3. $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} x_G-x_A \\ y_G-y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4-12 \\ 3-1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix} -12 \\ 3 \end{pmatrix}$

$y_{\overrightarrow{AN}}\times\frac{2}{3}=2=y_{\overrightarrow{AG}}$ et $x_{\overrightarrow{AN}}\times\frac{2}{3}=-12\times\frac{2}{3}=-8=x_{\overrightarrow{AG}}$ donc $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\times\overrightarrow{AN}$

4. $\overrightarrow{CG}\begin{pmatrix} x_G-x_C \\ y_G-y_C \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4+2 \\ 3+1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\frac{2}{3}\overrightarrow{CM} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\times 9\\ \frac{2}{3}\times 6\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \frac{2}{3}\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CG}$$

Ex 6

1a. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\ y_B - y_A\end{pmatrix} \iff \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-6\\ 7+2\end{pmatrix} \iff \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\ 9\end{pmatrix}$

b. $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \iff \begin{cases} x_M - x_A = -\frac{1}{3}x_{\overrightarrow{AB}} \\ y_M - y_A = -\frac{1}{3}y_{\overrightarrow{AB}} \end{cases} \iff \begin{cases} x_M = -\frac{1}{3}\times(-3)+6 = 7 \\ y_M = -\frac{1}{3}\times(9) - 2 = -5 \end{cases}$

2. $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} \iff \begin{cases} x_N - x_C = \frac{1}{4}(x_B - x_C) \\ y_N - y_C = \frac{1}{4}(y_B - y_C) \end{cases} \iff \begin{cases} x_N = \frac{1}{4}(3-9)+9 = -\frac{6}{4}+9 = 7{,}5 \\ y_N = \frac{1}{4}(7-1)+1 = \frac{6}{4}+1 = 2{,}5 \end{cases}$

3. $\overrightarrow{AP} = -3\overrightarrow{AC} \iff \begin{cases} x_P - x_A = -3(x_C - x_A) \\ y_P - y_A = -3(y_C - y_A) \end{cases} \iff \begin{cases} x_P = -3(9-6)+6 = -3 \\ y_P = -3(1+2)-2 = -11 \end{cases}$

4. $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}x_N - x_A\\ y_N - y_A\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}7{,}5-6\\ 2{,}5+2\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}1{,}5\\ 4{,}5\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BP}\begin{pmatrix}x_P - x_B\\ y_P - y_B\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}-3-3\\ -11-7\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}-6\\ -18\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x_M - x_C\\ y_M - y_C\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}7-9\\ -5-1\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}-2\\ -6\end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{BP}) = \begin{vmatrix}1{,}5 & -6\\ 4{,}5 & -18\end{vmatrix} = -18\times 1{,}5 - (-6)\times 4{,}5 = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{BP}$ st colinéaires donc $(AN)//(BP)$

$\det(\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{CM}) = \begin{vmatrix}-6 & -2\\ -18 & -6\end{vmatrix} = -6\times(-6) - (-18)\times(-2) = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{BP}$ et $\overrightarrow{CM}$ st colinéaires donc $(PB)//(CM)$

donc (AN), (BP) et (CM) st parallèles entre elles