En route pour la première

7 chapitres => 8 séances

1/ Nombres – Inégalités

Ex 1 : Nature de nombres

Simplifier chacune des expressions suivantes et identifier la nature du nombre obtenu.

$A = 2 + \frac{2}{3}$ $\quad B = \left(\sqrt{3}+1\right)\times\left(\sqrt{3}-1\right)$

$C = \left(\sqrt{5}+1\right)^2$ $\quad D = \frac{2}{5} + 7$

Ex 2 : Arrondis et calculatrice

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.
Recopier et compléter le tableau de valeurs de f en arrondissant à 10^{-3} près.

x	-5	-1	0	4	8	10
$f(x)$						

Ex 3 : Inéquations

Déterminer les ensembles de solutions des inéquations suivantes, puis les représenter sur la droite des réels.

1. $\frac{9}{4}x + \frac{6}{7} > 4$ **2.** $6 - \frac{17}{3}x \leqslant -\frac{5}{3}$ **3.** $\frac{8+x}{7} < 2x + \frac{9}{14}$

2/ Arithmétique :

Ex 1 :

Décompositions en produit de facteurs premiers

1. Décomposer 126 et 147 en produits de facteurs premiers.

2. Écrire sous forme irréductible la fraction $\frac{126}{147}$.

3. Écrire le nombre $\sqrt{147}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b dans $\mathbb{N}$ tels que b est le plus petit possible.

4. Déterminer tous les diviseurs positifs de 147.

5. L'affirmation suivante est-elle vraie ?

« Si deux entiers ont les mêmes diviseurs premiers, alors l'un est multiple de l'autre. »

Justifier.

Ex 2 : simplification

Calculer et simplifier les nombres suivants.

1. $A = \frac{4725}{2625}$

2. $B = \frac{\sqrt{75} \times \sqrt{192}}{\sqrt{196}}$

3. $C = \frac{3}{7} - \frac{4}{5} \times \frac{3}{8}$

4. $D = \frac{8}{5} \times \frac{3}{2} + \frac{7}{3}$

3/ Calcul littéral :

Ex 1 : Développement ; factorisation

On considère les quatre expressions suivantes.

$A(x) = (2x-3)^2 - (2x-3)(x+1)$

$B(x) = (3x+1)(3x-1) + 2(3x-1)$

$C(x) = 4x^2 + 20x + 25$ et $D(x) = (2x+1)^2 - 49$

1. Développer et réduire $A(x)$ et $B(x)$.

2. Factoriser $B(x)$, $C(x)$ et $D(x)$.

Ex 2 : Résolution d'équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $3x - 2(x+5) = 4 - (x-2)$ **2.** $(2x+1)(6-3x) = 0$

3. $(x+1)(3x-4) = (x+1)^2$ **4.** $4x^2 = (4x+3)^2$

Ex 3 : Choisir la forme adaptée

Soit f la fonction définie, pour tout réel x, par :

$$f(x) = x^2 - 6x + 8 \text{ (forme 1)}$$

1. Montrer que les expressions suivantes sont égales à $f(x)$ pour tout réel x.

$(x-2)(x-4)$ (forme 2) et $(x-3)^2 - 1$ (forme 3)

2. Répondre aux questions suivantes en choisissant la forme la mieux adaptée.

a. Calculer $f(1)$.

b. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

c. Déterminer les antécédents de 8 par la fonction f.

d. Déterminer les nombres ayant pour image 3 par la fonction f.

Ex 4 : Equation avec dénominateur

1. Montrer que pour tout réel x distinct de 1 et de $-\frac{2}{3}$, on a l'identité suivante.

$$\frac{2}{1-x} - \frac{x}{3x+2} = \frac{(x+1)(x+4)}{(1-x)(3x+2)}$$

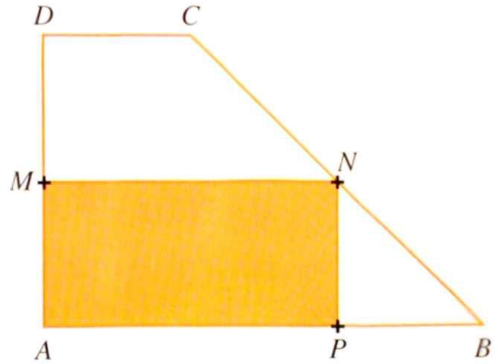
2. Résoudre alors l'équation suivante.

$$\frac{2}{1-x} = \frac{x}{3x+2}$$

Ex 5 : Un problème agricole

Un exploitant agricole dispose d'une parcelle de forme trapézoïdale. Dans cette parcelle, il souhaite délimiter une zone rectangulaire. On modélise la parcelle par un trapèze rectangle $ABCD$ avec $AB = 60$ m, $CD = 20$ m et $AD = 40$ m.

On considère un point M mobile sur le segment $[AD]$ et on construit le rectangle $AMNP$ inscrit dans le trapèze $ABCD$, comme l'indique la figure ci-dessous.



L'objectif de cet exercice est de déterminer :

① s'il existe une position de M pour laquelle l'aire de la surface colorée est égale à 800 m^2.

② s'il existe une position de M pour laquelle l'aire colorée est égale à celle du triangle PBN.

On note x la longueur AM et A la fonction, qui à x associe l'aire du rectangle $AMNP$.

1. À quel intervalle la variable x appartient-elle ? On note I cet intervalle dans la suite.

2. a. On admet que le triangle BNP est rectangle isocèle en P. Exprimer la longueur AP en fonction de x.

b. En déduire que l'aire du rectangle $APNM$ est égale à $A(x) = 60x - x^2$ (forme 1).

c. Justifier que, pour tout réel $x \in \mathrm{I}$, on a :

$$A(x) = 900 - (x - 30)^2 \text{ (forme 2)}$$

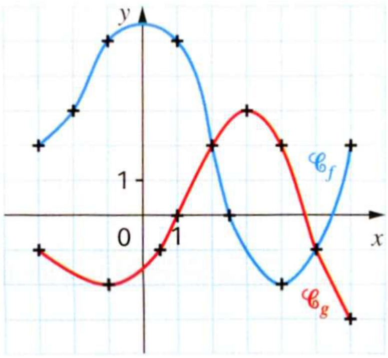
3. Résoudre les deux problèmes posés en introduction en précisant, dans chaque cas, les positions du point M correspondantes.

4. Justifier que, pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a $A(x) \leqslant 900$. Préciser la valeur de x pour laquelle $A(x) = 900$.

4/ Fonctions

Ex 1: Résolutions graphiques

On considère deux fonctions f et g représentées ci-contre.



1. Sur quel intervalle les fonctions f et g sont-elles définies ?

2. Discuter, suivant les valeurs du réel k, le nombre de solution(s) de l'équation $f(x)=k$.

3. Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes.

a. $f(x)=5$ **b.** $f(x)=g(x)$

c. $g(x)\leqslant -1$ **d.** $f(x)<g(x)$

Ex 2: Tableaux de signes

1. a. À l'aide d'un tableau de signes, étudier le signe du produit $(3x+1)(4-2x)$.

b. Résoudre alors l'inéquation suivante.

$$(3x+1)(4-2x)\geqslant 0$$

2. a. À l'aide d'un tableau de signes, étudier le signe du quotient $\dfrac{x(3x-6)}{1-x}$.

b. Résoudre alors l'inéquation suivante.

$$\frac{x(3x-6)}{1-x}\leqslant 0$$

Ex 3 : Inéquations

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $x-3(x+5)<3x-(2x-3)$

2. $(2x+1)^2>3x(2x+1)$ **3.** $4x^2\leqslant(2x+3)^2$

Ex 4 : Avec des quotients

1. Montrer que pour tout réel x distinct de 1 et -2, on a l'identité suivante.

$$\frac{1}{2x+4}-\frac{2}{x-1}=\frac{-3x-9}{(x-1)(2x+4)}$$

2. Résoudre alors l'inéquation suivante.

$$\frac{1}{2x+4}\geqslant\frac{2}{x-1}$$

Ex 5 : A propos de bénéfice

Une entreprise de menuiserie fait une étude sur la fabrication de chaises en bois pour une production comprise entre 5 et 70 chaises par jour.
Le coût de production $C(x)$, exprimé en euro, pour x chaises fabriquées est donné par la formule :

$$C(x) = x^2 - 10x + 500$$

Le prix de vente d'une chaise est de 50 €.

1. a. Calculer le coût de production de 20 chaises.

b. Calculer la recette pour la vente de 20 chaises.
En déduire le bénéfice réalisé pour 20 chaises.

2. Exprimer en fonction de x, la recette $R(x)$ réalisée pour la vente de x chaises.

3. a. À l'aide de la calculatrice, représenter, dans une fenêtre adaptée, les fonctions C et R.

b. Conjecturer alors le nombre de chaises que doit fabriquer cette menuiserie afin qu'elle réalise un bénéfice.

4. Vérifier que les inéquations $R(x) \geqslant C(x)$ et $(50 - x)(x - 10) \geqslant 0$ sont équivalentes.
Justifier alors la conjecture émise à la question **3. b.**

Ex 6 : Courbe sans contraintes

On considère une fonction f définie sur $[-6\,;10]$ et vérifiant les propriétés suivantes.

① $f(-6) = 4$, $f(4) = 6$ et $f(10) = 3$.

② Le minimum de f sur $[-6\,;10]$ vaut -1.

③ f est décroissante sur les intervalles $[-6\,;-2]$ et $[4\,;10]$. Elle est croissante sur $[-2\,;4]$.

④ La courbe de f coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses -4 et -1, et l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 1.

⑤ Cette courbe passe par le point $A(6\,;5)$.

1. Dresser le tableau de variations de f.

2. Tracer une courbe possible représentant f.

Ex 7 : Tableau de variations

La fonction h admet pour tableau de variations :

x	-5		-3		1		4
$h(x)$	-1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	4	$\searrow$	2

1. Décrire en une phrase les variations de la fonction h sur l'intervalle $[-5\,;4]$.

2. a. Quelle est l'image de 4 par la fonction h ?

b. Combien d'antécédents -2 admet-il par h ?

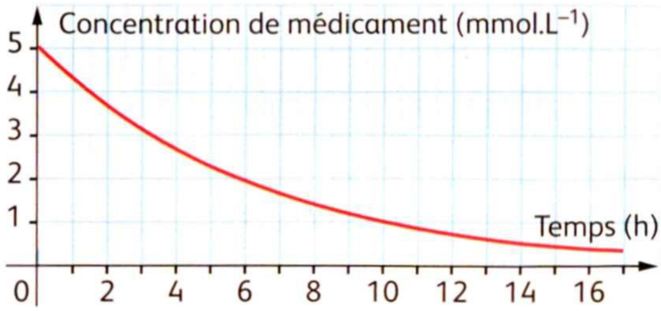
3. Dans chaque cas, donner un encadrement de $h(x)$ aussi petit que possible.

a. Pour tout réel $x \in [-3\,;1]$, on a $\ldots \leqslant h(x) \leqslant \ldots$

b. Pour tout réel $x \in [-5\,;4]$, on a $\ldots \leqslant h(x) \leqslant \ldots$

Ex 13 : Evolution de la concentration en médicament

On injecte un médicament dans le sang d'un malade. Le graphique ci-dessous donne la concentration du médicament présent dans le sang de ce patient en fonction du temps écoulé depuis l'injection.



1. a. Aussitôt après l'injection, quelle concentration de médicament est présente dans le sang du patient ?

b. Quelle est la concentration de médicament dans le sang du patient au bout de 8 heures ?

c. Déterminer la demi-vie de ce médicament, c'est-à-dire la durée nécessaire pour que sa concentration diminue de moitié.

2. Comment évolue cette concentration au cours du temps ?

3. Que peut-on dire de l'évolution de la vitesse d'élimination du médicament au cours du temps ? Argumenter.

5/ Droites et systèmes

Ex 1 : Points alignés

Partie A. **Résolution d'un système**

Résoudre le système : $\begin{cases} 2x+9y=37 \\ -5x+6y=31 \end{cases}$

Partie B. **Étude d'une configuration**

Dans un repère, on donne $A(-4;5)$, $B(5;3)$, $C(-5;1)$ et $D(1;6)$. Soit M le milieu du segment $[BC]$.

1. a. Déterminer une équation cartésienne de chacune des droites (AB) et (CD).

b. Montrer que les équations de (AB) et (CD) correspondent aux équations du système de la **partie A.**

c. Justifier que (AB) et (CD) sont sécantes en un point F dont on donnera les coordonnées.

2. a. Déterminer une équation cartésienne de chacune des droites (AC) et (DB).

b. Justifier que (AC) et (DB) sont sécantes en un point G dont on calculera les coordonnées.

3. Déterminer une équation cartésienne de la droite (FG).

4. Montrer que les points M, F et G sont alignés.

Ex 2: Modélisation d'une situation

Une entreprise vend différents modèles de chaises dont le prix est compris entre 100 € et 1 500 €.

Une étude montre que si le prix de vente d'un modèle de chaise est de 100 € alors, elle en vend chaque mois environ 2 500. Pour un modèle à 1 500 €, elle en vend seulement 10.

Soient $M(100;2500)$ et $N(1500;10)$.

On admet que la droite (MN) permet d'estimer le nombre de chaises vendues en fonction du prix du modèle.

1. Déterminer une équation réduite de la droite (MN). Arrondir le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine au centième.

2. Estimer le nombre de chaises vendues pour un modèle à 500 euros.

3. Un modèle est rentable si chaque mois plus de 1 000 exemplaires sont vendus.

Quel est le prix de vente que ne doit pas dépasser un modèle ?

Ex 3: Comparaison de tarifs

Une société de location de voitures propose deux formules A et B.

- Formule A

75 € de forfait fixe et 0,40 € par kilomètre parcouru.

- Formule B

Pas de forfait fixe mais 0,70 € par kilomètre parcouru.

1. Quelle formule est la plus avantageuse si un client doit parcourir 150 km ? 300 km ?

2. Soit x le nombre de kilomètres parcourus par un client.

a. Exprimer, en fonction de x, le prix à payer y_A avec la formule A puis le prix à payer y_B avec la formule B.

b. Construire dans un repère adapté les droites correspondant aux équations réduites obtenues en **2. a.**

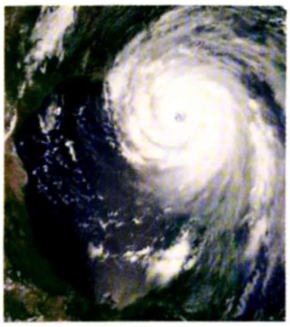
c. Déterminer graphiquement à partir de combien de kilomètres la formule A est plus avantageuse.

d. Retrouver la réponse à la question **2. c.** par le calcul.

6/ Pourcentages et statistiques

Ex 1 : Vrai ou faux

L'échelle de Saffir-Simpson est l'échelle de classification de l'intensité des événements météorologiques se formant dans le bassin cyclonique de l'océan Atlantique. Elle s'échelonne entre les dépressions tropicales jusqu'aux cyclones de catégorie 5.



Katrina 2005 (catégorie 5)

L'année 2005 fut une année record, le tableau ci-dessous en répertorie le nombre d'événements.

Catégorie	D	T	1	2	3	4	5
Effectif	3	13	7	1	2	1	4

D : Dépression tropicale T : Tempête tropicale

Indiquer si l'affirmation est vraie ou fausse. Justifier.

1. On peut calculer la moyenne des intensités des événements de l'année 2005.

2. Plus de la moitié des événements n'ont pas été classés comme étant un cyclone en 2005.

Les dommages structurels (habitations, routes…) subissent des dégâts à partir de la catégorie 3.

3. Plus de 20 % des événements ont endommagé des structures en 2005.

4. Environ 53 % des cyclones n'ont pas endommagé les structures.

Ex 2 : Dépot de brevet

Jusqu'en 2015, l'entreprise PSA a été le leader français dans l'innovation et dans le nombre de dépôts de brevets. On donne ci-dessous l'évolution du nombre de dépôts de brevets entre 2013 et 2017.

Année	2013/14	2014/15	2015/16	2016/17
Évolution (%)	−22,9 %	−4,8 %	−8,1 %	+9,8 %

1. Déterminer le taux d'évolution global du nombre de brevets déposés entre 2013 et 2017.
Arrondir au centième.

2. Quelle devrait être l'évolution entre 2017 et 2018 pour que le nombre de brevets déposés par PSA soit globalement le même qu'en 2013 ?

3. En 2017, le nombre de brevets déposés étaient de 1 110. Déterminer le nombre de dépôts en 2013.

7/ Probabilités :

Ex 1 : Activités sportives

À la salle de sport, Stéphane pratique trois activités : la musculation (M), le CrossFit (C) et la corde à sauter (S). Il décide d'organiser sa séance en choisissant l'ordre des activités au hasard.

1. a. Construire un arbre permettant de décrire toutes les façons d'organiser sa séance de sport.

b. De combien de façons peut-il organiser sa séance ?

2. On considère les événements suivants.

- A : « La séance commence par le CrossFit. »
- B : « La corde à sauter est avant la musculation. »

a. Écrire A et B sous forme d'ensemble.

b. Décrire par une phrase l'événement $A \cap B$ et indiquer le nombre d'issues que possède $A \cap B$.

c. Décrire par une phrase l'événement $A \cup B$ et indiquer le nombre d'issues que possède $A \cup B$.

d. Décrire par une phrase l'événement $\overline{B}$ et indiquer le nombre d'issues que possède $\overline{B}$.

Ex 2 : Lancer de deux dés

On lance deux dés tétraédriques équilibrés numérotés de 1 à 4. On s'intéresse à l'écart entre le plus grand résultat et le plus petit.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant afin de connaître tous les écarts possibles.

1[er] dé / 2[nd] dé	1	2	3	4
1	0	1	...	...
2	1	...	...	...
3	...	...	...	...
4	...	...	...	...

2. Établir la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.

3. a. Calculer la probabilité que l'écart entre les deux résultats obtenus ne soit pas nul.

b. Calculer la probabilité que l'écart entre les deux résultats obtenus soit au moins égal à 2.

c. Calculer la probabilité que l'écart entre les deux résultats obtenus soit un nombre premier.

4. Calculer la probabilité que l'écart entre les deux résultats obtenus soit divisible par 2 et que le premier dé affiche un résultat supérieur au deuxième dé.

5. Calculer la probabilité que l'écart soit un nombre impair ou égal à 2.

Ex 3 : Jeu de cartes

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.
On considère les événements suivants.

- T : « La carte est un trèfle. »
- C : « La carte est un carreau. »
- F : « La carte est une figure. »

1. Calculer la probabilité des T, C et F.

2. a. Décrire par une phrase l'événement $T \cap F$ et calculer sa probabilité.

b. Décrire par une phrase l'événement $T \cup F$ et calculer sa probabilité.

3. a. Que peut-on dire des événements T et C ?

b. Calculer la probabilité de $T \cup C$.

4. Calculer la probabilité que la carte choisie ne soit pas une figure.

5. Calculer la probabilité que la carte ne soit pas un carreau ou ne soit pas une figure.

Ex 4 : Choix d'une formule

Dans un club de remise en forme, les 600 adhérents peuvent choisir entre trois formules :

- la formule sportive (notée S).
- la formule relaxation (notée R).
- la formule liberté (notée L) permettant d'accéder à toutes les installations.

Le club comporte 64 % de femmes qui choisissent, pour 50 % d'entre elles, la formule relaxation et pour 37,5 % d'entre elles, la formule liberté.

De plus, 25 % des hommes choisissent la formule relaxation et pour la moitié des hommes, le choix se porte sur la formule sportive.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant.

Formule	S	R	L	Total
Femme				
Homme				
Total				600

Un adhérent est choisi au hasard.

2. Calculer la probabilité que l'adhérent soit un homme ayant choisi la formule relaxation.

3. Calculer la probabilité qu'un adhérent soit une femme ou ait choisi la formule sportive.

4. Calculer la probabilité qu'un adhérent n'ait pas choisi la formule liberté.

5. Un client ayant la formule liberté est sélectionné.
Calculer la probabilité que ce soit une femme